**Análisis Combinatorio** : Es la rama de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permite resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo podemos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos , placas o loterías se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos.  
Además el estudio y comprensión del análisis combinatorio no va ha servir de andamiaje para poder resolver y comprender problemas sobre probabilidades  
**Principios fundamentales del Análisis Combinatorio:** En la mayoría de los problemas de análisis combinatorio se observa que una operación o actividad aparece en forma repetitiva y es necesario conocer las formas o maneras que se puede realizar dicha operación. Para dichos casos es útil conocer determinadas técnicas o estrategias de conteo que facilitarán el cálculo señalado.  
El análisis combinatorio también se define como una manera práctica y abreviada de contar; las operaciones o actividades que se presentan son designadas como eventos o sucesos.  
Ejemplo :

1. Señalar las maneras diferentes de vestir de una persona, utilizando un número determinado de prendas de vestir
2. Ordenar 5 artículos en 7 casilleros
3. Contestar 7 preguntas de un examen de 10
4. Designar 5 personas de un total 50 para integrar una comisión
5. Sentarse en una fila de 5 asientos 4 personas
6. Escribir una palabra de 7 letras utilizando 4 consonantes y 3 vocales

Si se lanzan simultaneamente un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6 y una moneda de cuantas maneras puede caer.  
  
Suceso A (Dado): 6  
Suceso B(Moneda): 2  
6X2=12  
  
Árbol de posibilidades  
  
  
  
  
VARIACIONES  
Se denomina variación, de los elementos de un conjunto, una disposición ordenada de los mismos. Si hay *n* elementos en el conjunto, el número de variaciones dependerá del número de objetos *m* que se deseen tomar y ordenar.   
Las variaciones de *n* elementos tomados en grupo de *"* *m* en *m* *"* se denotan por:Vm . Antes de definir el número de variaciones, aclaremos la noción de factorial de un número, primero que todo dicho número debe definirse como el elemento de los números enteros positivos sin incluir el cero, así pues, el factorial de *n* y se escribe *n!* Se define como : *n! = n(n-1) (n-2) ... x3x2x1* y decimos que *0! = 1* , por definición.  
  
Luego el número de variaciones está dado por la expresión:   
  
  
**COMBINACIONES**  
Las combinaciones de orden *m* de *n* objetos :7_clip_image006.gifson los grupos de *m* objetos que se pueden formar entre los *n* , de modo que dos cualesquiera difieran en algún objeto. A diferencia de las variaciones, en las combinaciones, no importa el orden de sucesión de los elementos. El número de combinaciones está dado por la fórmula:   
7_clip_image002.gif

**Combinatoria**

Esta sección esta dedicada a una de las herramientas básicas de las que se utiliza dentro de diversas ramas como son el álgebra y la probabilidad, nos referimos a la combinatoria, aunque también será abordada las permutaciones.

Si deseamos considerar el número de formas en que se puede llevar a cabo un evento en el que se tienen diferentes acciones, siempre es conveniente preguntarnos si importa el orden.

Analicemos los siguientes dos ejemplos antes de realizar una generalización:

1.-Sean las siguientes tres letras A  B C

a).- ¿De cuantas forma se puede agrupar las tres letras tomando dos letras, si podemos distinguir de http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image002.gif, no se permite repetir letras?

b).- ¿De cuantas forma se puede agrupar las tres letras tomando dos letras, si no importa el orden, es decir  AB=BA, sin permitir repetir letras?

**Solución.**

a).- El conjunto de pares que podemos formar son las siguientes:

AB       AC      BA       BC       CA      CB

b).- Los pares que podemos formar son los siguientes:

AB       AC      BC

En estos dos incisos no ha resultado sumamente sencillo determinar el número de casos e inclusive hemos podido formular como son los pares, pero como abordaríamos el problema en el caso en que solo nos interese el número de posibilidades.

Para el primer inciso. Sabemos que el número de el número de posibilidades de colocar la primera letra es 3, para elegir la segunda letra sabemos que tenemos solo dos posibilidades, dado que ya se ocupo una letra, es decir:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image004.gif

Para el segundo caso tendremos la mitad de posibilidades ya que podemos  distinguir ordenes, es decir,  AB=BA

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image006.gif

El criterio utilizado en el primer caso surge a partir de el principio fundamental del análisis combinatorio, y es el siguiente:

Principio fundamental. Si un suceso puede ocurrir de http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image008.gif maneras y una vez que ocurre este puede ocurrir otro de http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image010.gif maneras entonces ambos pueden ocurrir de http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image012.gifmaneras

**2.-**Determinemos que sucede si tenemos las siguientes letras:  A, B, C, D, E

a).- ¿De cuántas formas podemos agrupar las letras si consideramos agrupaciones de tres letras en las que podemos distinguir el orden, es decir, http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image014.gif?

b).- ¿ De cuántas formas podemos agrupar las letras si consideramos agrupaciones de tres letras en las que no podemos distinguir el orden, es decir, ABC=BCA?

**Solución.**

Para el primer inciso. Para colocar la primera letra tenemos 5 posibilidades, para colocar la segunda tenemos 4 posibilidades dado que ya se ha colocado una primera letra del total de las cinco que teníamos, para colocar la tercer letra, dado que ya hemos ocupado dos letras para colocar las anteriores solo tenemos 3 posibilidades para la última, es decir:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image016.gif

Para el segundo inciso vemos que el orden no nos importa, por lo que adicional al resultado debemos considerar que el número de veces en que se repite las letras tomando de tres letras es: http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image018.gif, por lo que dividiendo entre 6 habremos quitado el número de repeticiones, es decir expresiones como las siguientes solo se contaran una sola vez y no mas veces: ABC=BCA. Finalmente el resultado es igual a

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image020.gif

esos ejercicios no hace pensar que podemos obtener una generalización sobre la obtención del número de permutaciones, en el caso en que podemos distinguir una agrupación sobre otra, o de combinaciones, en el caso que no podamos distinguir ordenes,  en que podemos elegir un conjunto de elementos r de un total de  n .

Sea http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image022.gifelementos diferentes, ¿de cuántas formas puedo agrupar r elementos http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image024.gif´s, http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image026.gif?

Podemos razonar de la siguiente forma, de acuerdo al principio fundamental del análisis combinatorio:

Para elegir el primer elementos tenemos n elementos.

Para elegir el segundo elemento tenemos  n-1 elementos.

De manera sucesiva hasta llegar a tener  los r elementos.

Por lo que el número de formas distintas en las que podemos agrupar los conjuntos tomando de r elementos es igual a

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image028.gif

Antes de continuar recordemos un poco la definición de factorial, sabemos que el número factorial se expresa de la forma

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image030.gif

Dos consideraciones adicionales son el hecho de que 0!=1  y 1!=1, el primero, por el momento, lo podemos considerar como definición.

Es importante mencionar que el número factorial abordado en estas primeras secciones no admite factoriales de números fraccionarios, sin embargo, si existen y serán abordados en el caso de funciones gamma, así por ejemplo tenemos el número http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image032.gif.

Considerando la definición en la penúltima expresión para ordenar r elementos distintos de un conjunto de n  la podemos expresar como:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image034.gif

Por lo que hemos encontrado una expresión para determinar el número de eventos posibles en que puede suceder un evento si nos importa el orden, es decir, podemos distinguir una agrupación de otra pese a que tenga los mismos individuos, común mente a esta expresión se le conoce como permutación de r elementos tomados n.

Su notación es la siguiente:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image036.gif

en el caso en que no nos importa el orden o no podemos distinguirlo estaremos haciendo uso de una combinatoria, que como hemos observado, se tiene que dividir el número de elementos que de repiten, que si se trata de una toma de r elementos de un conjunto de n debe de ser igual a r!, a fin de solo considerar una sola vez el evento, por lo tanto:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image038.gif

Debemos de considerar propiedades como las siguientes en el caso de las permutaciones:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image040.gif

Demostremos estas propiedades:

Utilizando la  definición construida para el factorial  http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image042.gif para obtener

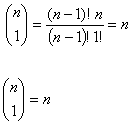
http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image044.gif

Utilizando la definición

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image046.gif

  Para demostrar esta http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image048.gif podemos utilizar la propiedad mostrada en el ejercicio a) de lo que directamente tenemos http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image050.gif pero del ejercicio http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image052.gif por lo tanto http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image048.gif

De la definición podemos determinar http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image054.gif recordando que         n!=(n-1)! n  tenemos entonces



Cuando el numero r es grande en la evaluación de n! resulta complicada, inclusive a través de una computadora,  por lo que es común utilizar la formula aproximada de James Stirling, que es igual a

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image058.gif

donde http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/combinatoria_archivos/image060.gif, base del logaritmo natural de los logaritmos.

**Ejercicios**

Un grupo de 60 estudiantes desea elegir tres representantes de grupo, determina el número de conjuntos de 3 elementos que se pueden formar.

**Solución.**

Es claro que en este caso como no tienen una función especifica entre los integrantes que formaran el conjunto se trata de una combinación, por lo tanto un primer camino conduce a

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image002.gif

recordemos que 60!=57! 58 59 60  por lo tanto

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image004.gif

Otra forma de abordar el problema sería primero considerar el número de posibilidades que tenemos para elegir el primer alumno, en este caso son 60, para elegir el segundo dado que sea elegido uno de los 60 solo quedan 59, para elegir el siguiente solo quedara 59. Sin embargo, debemos considerar que son 3! el número de veces en que se repiten dos elementos los tres elementos por lo que la solución estaría dada como:

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image006.gif

Sin embargo que sucede si deseamos obtener un comité en el que se otorgan cargos de jefe de grupo, de secretario y de tesorero.  En este caso podemos distinguir entre las siguientes asignaciones:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Jefe de grupo | Secretario | Tesorero |
| Gabriel | Esther | Daniel |
| Esther | Gabriel | Daniel |
| Daniel | Gabriel | Esther |

En este caso si importa el orden, por lo que el resultado anterior se modifica obteniendo.

El número de comités que se pueden determinar son  http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image008.gif. Como podemos ver no es necesario dividir entre 3! como en el caso anterior  ya que podemos distinguir el orden.

Una forma de abordar el problema sería el siguiente, para obtener un presidente tenemos 60 formas de elegirlo, para elegir el secretario tenemos 59 formas de elegirlo, una vez elegido el presidente, para elegir el último candidato tenemos 58 formas por lo que las formas de elegir el comité es igual a

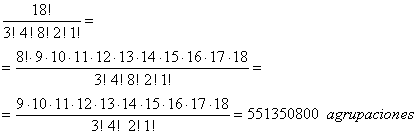
http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image010.gif

Un caso particular de permutaciones se presenta cuando tenemos conjuntos de objetos que son de un mismo tipo y que por lo tanto no se puede distinguir entre ellos. Concretamente definamos este tipo de permutaciones. Sean n objetos de los cuales http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image012.gif son todos similares entre si, sean http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image014.gifotro subcjonjunto de el conjunto de los n objetos,  así sucesivamente, sean http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image016.gif objetos otro subconjunto, de objetos con características comunes, subconjunto de los *N* objetos, el número de permutaciones que se pueden realizar con dicha agrupación es

http://dieumsnh.qfb.umich.mx/PROBABILIDAD/comejer_archivos/image018.gif

**Ejemplo:**

**1.-** Se tiene en quiere ordenar 18 alumnos de acuerdo al color de ropa que traen, se sabe que 3 alumnos traen ropa blanca, 4  ropa negra, 8 mezclilla azul y 2 ropa roja y 1 ropa café. De cuantas formas pueden agruparse los 18 alumnos.



**2.-** ¿Cuantas palabras se pueden formar utilizando las letras de la palabra farmacología, no necesariamente las palabras tienen significado?

Tenemos las siguientes frecuencias

|  |  |
| --- | --- |
| Frecuencia | Letra |
| 3 | a |
| 1 | i |
| 2 | o |
| 1 | f |
| 1 | r |
| 1 | m |
| 1 | c |
| 1 | l |
| 1 | g |

Por lo que tendremos:

